Examen Escrito
Evaluaciones Especiales Mtría. en Matemáticas
Proceso de Ingreso 2024

Sección 1: Álgebra Lineal

Responder dos de los siguientes tres problemas:

Problema 1. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, k valores propios distintos entre sí, de un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y sean $v_1, \ldots, v_k$, k vectores propios correspondientes. Prueba que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Problema 2. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un espacio V. Demostrar que $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$ es una base de V. Encontrar la matriz de transición de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$. Mostrar explícitamente la relación entre las coordenadas respecto a las bases.

Problema 3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 7. Supóngase que una transformación lineal $T : V \to V$ tiene sólo dos valores propios distintos λ, μ. Si el polinomio característico es $p(x) = (x - \lambda)^5 (x - \mu)^2$ y el polinomio minimal es $p_m(x) = (x - \lambda)^3 (x - \mu)$, ¿cuál es la forma canónica de Jordan de T? Explique su respuesta.

Sección 2: Análisis

Responder dos de los siguientes tres problemas:

Problema 4.

(i) Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow (0, \infty)$. Demostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > \epsilon$ para todo $x \in X$.

(ii) Sea X un conjunto finito no vacío. Demostrar que el espacio métrico (X, d) es completo.

(iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que si $A \subset X$ es finito, entonces A es compacto.

Problema 5. Sea (X, d) un espacio métrico, (x_n) una sucesión de Cauchy en X y $x \in X$. Demostrar que $(f(x_n))$ converge a $f(x)$, para toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$, si y solo si (x_n) converge a x.

Problema 6. Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcular
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$
¿Es f diferenciable en $(0,0)$? ¿Por qué?

Sección 3: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Responder uno de los siguientes dos problemas:

Problema 7. Demuestre que si $a, \lambda > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces cada solución $y(t)$ de la ecuación
$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$
tiene la propiedad de que
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$
Problema 8. Demuestre que si
$$\frac{N_x - M_y}{xM - yN} = R,$$
donde R depende únicamente de la cantidad xy, entonces la ecuación diferencial
$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$
tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Encuentre una fórmula general para este factor integrante.